PRELEGEREA 5
STATICA CADRELOR

5.1 Elemente şi ansambluri structurale

Bara de cadru (spaţial) este elementul structural/finit obţinut prin suprapunerea efectelor deformării elastică ca zăbrea şi grindă continuă (ipoteza micilor deformaţii), având lungimea L, modulul de elasticitate, constant, E, aria secţiunii transversale, constantă, A, şi două momente de inerţie ale secţiunii transversale, raportate la direcţiile principale, constante, I_1 şi I_2.

Pentru bara de cadru plan, comportarea la deformare, poate fi studiată prin raportarea parametrilor proprii, principali d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 şi secundari f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 la un reper propriu, definit de axa x, dispusă longitudinal elementului şi axa y, dispusă normal la axa longitudinală a acestuia, precum şi de o a treia axă, z (normală la planul format de primele două axe), figura 5.1; la axele acestui reper se raportează şi momentul de inerţie caracteristic,.

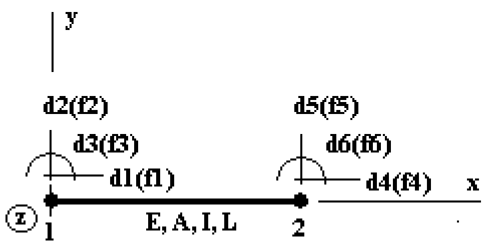

Figura 5.1 Bară de cadru plan în sistemul de axe propriu *xy*

Ecuaţia de echilibru static a barei de cadru plan, fără luarea în considerare a influenţei deformaţiilor din efortul de lunecare, stabilită prin metodele staticii structurilor sau metoda elementelor finite, este dată de relaţia 5.1.1a .

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}$$

sau în exprimare matriceală compactă, de forma (5.1.1a)

$$[ke] \cdot \{d\} = \{f\}$$

unde: $[ke]$ este matricea de rigiditate a barei de cadru plan raportată la parametrii proprii, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6;

$\{d\}$ - vectorul deplasărilor extremităţilor barei de cadru plan sau parametrilor proprii principali d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6;

$\{f\}$ - vectorul forţelor ce acţionează la extremităţile barei de cadru plan sau parametrilor proprii secundari f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6.

Ecuaţia de echilibru static a barei de cadru plan, cu luarea în considerare a influenţei deformaţiilor din efortul de lunecare, stabilită prin aceleaşi metodele, este dată de relaţia 5.1.1b.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\gamma_1 EI_z}{L^3} & \frac{6\gamma_2 EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12\gamma_1 EI_z}{L^3} & \frac{6\gamma_2 EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6\gamma_2 EI_z}{L^2} & \frac{4\gamma_3 EI_z}{L} & 0 & -\frac{6\gamma_2 EI_z}{L^2} & \frac{2\gamma_4 EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\gamma_1 EI_z}{L^3} & -\frac{6\gamma_2 EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12\gamma_1 EI_z}{L^3} & -\frac{6\gamma_2 EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6\gamma_2 EI_z}{L^2} & \frac{2\gamma_4 EI_z}{L} & 0 & -\frac{6\gamma_2 EI_z}{L^2} & \frac{4\gamma_3 EI_z}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \tag{5.1.1b}$$

unde:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{1+12t} \quad \gamma_3 = \frac{1+3t}{1+12t} \quad \gamma_4 = \frac{1-6t}{1+12t} \quad t = c_T \frac{EI_z}{GAL^2} \quad c_T = \frac{A}{I_z^2} \cdot \int_z \frac{S^2(z)}{b(z)} dz$$

unde: c_T este coeficientul de formă al secţiunii transversale; pentru secţiuni dreptunghiulare influenţa deformaţiilor din efortul de lunecare este importantă pentru rapoarte *L/h* (*h* fiind înălţimea secţiunii transversale) egale cu 2 ... 8.

În cazul barei de cadru spaţial, pentru care luăm în considerare şi torsiunea, comportarea la deformare elastică, poate fi studiată prin raportarea la acelaşi reper propriu, *xyz*, numai că, în acest caz, parametrii proprii principali sunt, pentru prima extremitate d_1, d_2, d_3 (translaţii după *x*, *y*, *z*) şi d_4, d_5, d_6 (rotiri în jurul axelor *x*, *y*, *z*) iar pentru a doua extremitate d_7, d_8, d_9 (translaţii după *x*, *y*, *z*) şi d_{10}, d_{11}, d_{12} (rotiri în jurul axelor *x*, *y*, *z*); cei secundari sunt, pentru prima extremitate f_1, f_2, f_3 (forţe după *x*, *y*, *z*) şi f_4, f_5, f_6 (momente în jurul axelor *x*, *y*, *z*) iar pentru a doua extremitate f_7, f_8, f_9 (forţe după *x*, *y*, *z*) şi f_{10}, f_{11}, f_{12} (momente în jurul axelor *x*, *y*, *z*). În felul acesta putem defini termenii ecuaţiei matriceale de echilibru static pentru bara de cadru spaţial:

- matricea de rigiditate

$$[k]=\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2}\\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0\\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L}\\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2}\\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0\\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
\end{bmatrix}$$

- vectorul parametrilor principali   vectorul parametrilor secundari

$$\{d\}=\begin{Bmatrix} d_1\\ d_2\\ d_3\\ d_4\\ d_5\\ d_6\\ d_7\\ d_8\\ d_9\\ d_{10}\\ d_{11}\\ d_{12} \end{Bmatrix} \qquad \{f\}=\begin{Bmatrix} f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\\ f_5\\ f_6\\ f_7\\ f_8\\ f_9\\ f_{10}\\ f_{11}\\ f_{12} \end{Bmatrix}$$

Structurile de tip cadru (tratate ca structuri cu noduri rigide) se pot organiza după o direcţie (puţin interesante), dar de cele mai multe ori după două direcţii (cadre plane, figura 5.2) şi după trei direcţii (cadre spaţiale).

Pentru fiecare nod *i*, al unui cadru plan se definesc câte trei parametri principali, D_{3i-2}, D_{3i-1} şi D_{3i}, primul fiind definit ca deplasare de translaţie după prima axă a reperului structurii (obişnuit *X*), a doua ca deplasare de translaţie după a doua axă a reperului structurii (obişnuit *Y*) şi a treia ca rotire în în jurul celei de a treia axe a reperului (obişnuit *Z*); pentru o structură cu *n* noduri se definesc *3n* parametri principali. Parametrii secundari corespunzători sunt forţele nodale F_{3i-2}, F_{3i-1} şi F_{3i}; pentru o structură cu *n* noduri se definesc *3n* parametri secundari. Parametrii sunt pozitivi dacă vectorii ce îi definesc au acelaşi sens cu sensul pozitiv al axelor cu care sunt paraleli sau rotesc în sens antiorar.

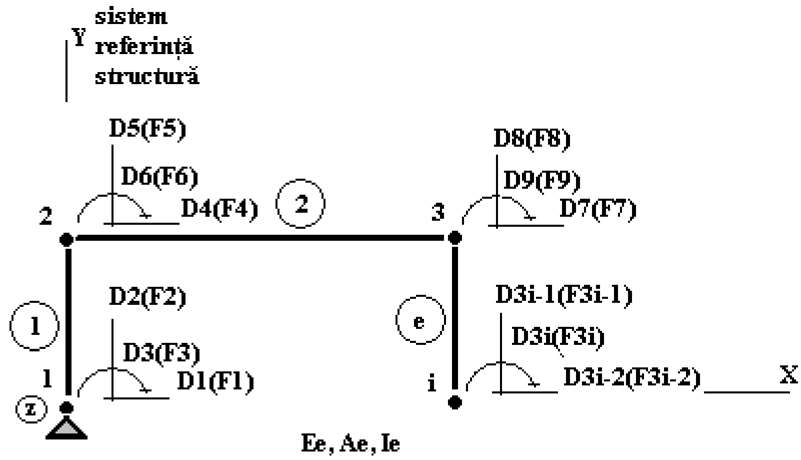

Figura 5.2 Cadru plan în sistemul de axe structural *XY*

Şi în cazul cadrului plan, ca şi în cazul celui spaţial, compatibilitatea deplasărilor extremităţilor elementului cu deplasările nodului de conectare al structurii este asigurată.

5.2 Statica matriceală clasică pentru analiza structurilor cu elemente de cadru plan

5.2.1 Ecuaţia matriceală de echilibru static a elementului finit tip bară de cadru plan

Parametrii proprii ai extremităţilor barei de cadru plan sunt proiectaţi pe direcţiile parametrilor structurali aferenţi ai nodurilor de conectare cu ajutorul matricei de transformare prin rotire *T*, care are ca elemente componente, indirect, cosinuşii directori ai axelor proprii (*x* şi *y*) definiţi funcţie de reperul structurii (*XY*); în acest caz matricea de transformare prin rotire se poate exprima, mai simplu, prin poziţionarea axei de referinţă *x* faţa de axa de referinţă *X*, astfel:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

unde: α este unghiul măsurat, în sens pozitiv, de la axa de referinţă *X* către axa de referinţă *x* (antiorar).

Matricea de transformare prin rotire este necesară pentru obţinerea ecuaţiei matriceale de echilibru static a barei de cadru plan prin raportare la parametrii proprii aferenţi, ca şi în cazul zăbrelei şi/sau grinzii continue.

5.2.2 Analiza statică a cadrului plan

Enunţarea problemei: Să se efectueze analiza statică a cadrului plan (determinarea deplasărilor nodurilor, forţelor din reazeme şi eforturilor din elementele finite), schema statică, caracteristicile geometrice şi mecanice, precum şi încărcările fiind precizate pe figura 5.3.

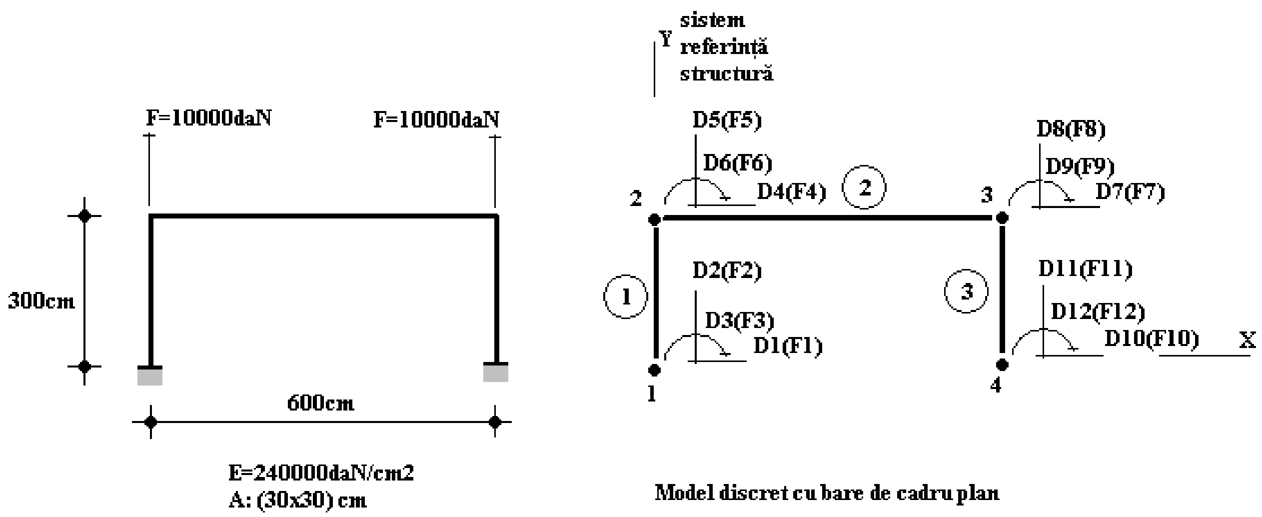

Figura 5.3 Structura de cadru plan şi modelul discret cu elemente finite de tip bară

Rezolvarea problemei:

Aplicaţia utilizează notaţii pentru variabile şi operatori corespunzând programului de calcul matematic Mathcad (simbolul := are înţelesul de atribuire).

Etapa 0, pregătitoare

$E := 240000 \qquad A := 30 \times 30 \qquad I := \frac{30 \times 30^3}{12}$

Conditii la limita

Dirichlet: $D01 := 0 \quad D02 := 0 \quad D03 := 0 \quad D010 := 0 \quad D011 := 0 \quad D012 := 0$

Neumann: $F04 := 0 \quad F05 := -10000 \quad F07 := 0 \quad F08 := -10000$

Etapa 1, stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static pentru fiecare element finit al cadrului plan:

Bară 1 (figura 5.4.1)

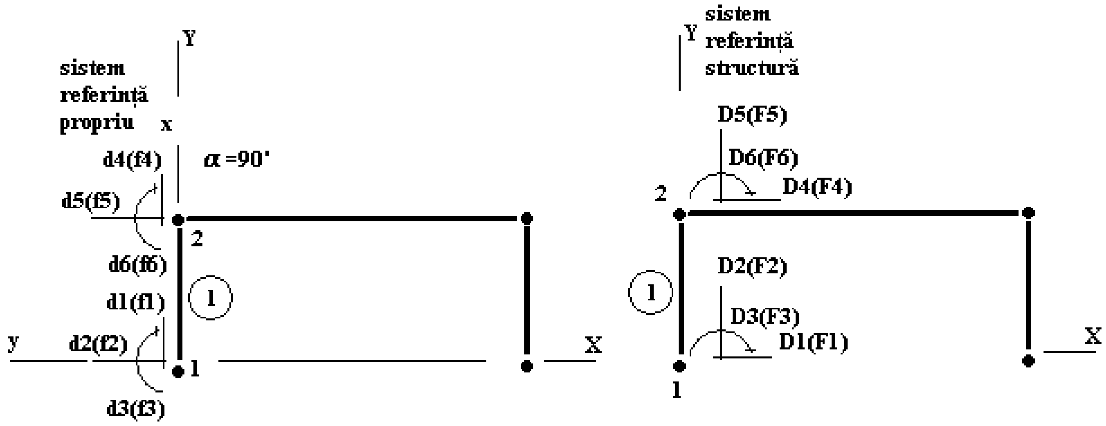

Figura 5.4.1 Parametri şi sisteme de referinţă pentru bara 1

Etapa 1.1 - prin raportare la parametrii proprii

$L1 := 30($

$$ke1 := \begin{pmatrix} \frac{E\cdot A}{L1} & 0 & 0 & \frac{-E\cdot A}{L1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & 0 & \frac{-12\cdot E\cdot I}{L1^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} \\ 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L1} & 0 & \frac{-6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L1} \\ \frac{-E\cdot A}{L1} & 0 & 0 & \frac{E\cdot A}{L1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12\cdot E\cdot I}{L1^3} & \frac{-6\cdot E\cdot I}{L1^2} & 0 & \frac{12\cdot E\cdot I}{L1^3} & \frac{-6\cdot E\cdot I}{L1^2} \\ 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L1} & 0 & \frac{-6\cdot E\cdot I}{L1^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L1} \end{pmatrix}$$

$$ke1 = \begin{pmatrix} 720000 & 0 & 0 & -720000 & 0 & 0 \\ 0 & 7200 & 1080000 & 0 & -7200 & 1080000 \\ 0 & 1080000 & 216000000 & 0 & -1080000 & 108000000 \\ -720000 & 0 & 0 & 720000 & 0 & 0 \\ 0 & -7200 & -1080000 & 0 & 7200 & -1080000 \\ 0 & 1080000 & 108000000 & 0 & -1080000 & 216000000 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.2 - prin raportare la parametrii structurali aferenţi

$$\alpha := \frac{\pi}{2} \qquad T1 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad k1 := T1^T\cdot ke1\cdot T1$$

$$k1 = \begin{pmatrix} 7200 & 0 & -1080000 & -7200 & 0 & -1080000 \\ 0 & 720000 & 0 & 0 & -720000 & 0 \\ -1080000 & 0 & 216000000 & 1080000 & 0 & 108000000 \\ -7200 & 0 & 1080000 & 7200 & 0 & 1080000 \\ 0 & -720000 & 0 & 0 & 720000 & 0 \\ -1080000 & 0 & 108000000 & 1080000 & 0 & 216000000 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.3 - prin raportare la parametrii structurali

$i := 1..12$ $\quad j := 1..12$ $\quad K1_{i,j} := 0$

$K1_{1,1} := k1_{1,1}$ $\quad K1_{1,2} := k1_{1,2}$ $\quad K1_{1,3} := k1_{1,3}$

$K1_{1,4} := k1_{1,4}$ $\quad K1_{1,5} := k1_{1,5}$ $\quad K1_{1,6} := k1_{1,6}$

$K1_{2,1} := k1_{2,1}$ $\quad K1_{2,2} := k1_{2,2}$ $\quad K1_{2,3} := k1_{2,3}$

$K1_{2,4} := k1_{2,4}$ $\quad K1_{2,5} := k1_{2,5}$ $\quad K1_{2,6} := k1_{2,6}$

$K1_{3,1} := k1_{3,1}$ $\quad K1_{3,2} := k1_{3,2}$ $\quad K1_{3,3} := k1_{3,3}$

$K1_{3,4} := k1_{3,4}$ $\quad K1_{3,5} := k1_{3,5}$ $\quad K1_{3,6} := k1_{3,6}$

$K1_{4,1} := k1_{4,1}$ $\quad K1_{4,2} := k1_{4,2}$ $\quad K1_{4,3} := k1_{4,3}$

$K1_{4,4} := k1_{4,4}$ $\quad K1_{4,5} := k1_{4,5}$ $\quad K1_{4,6} := k1_{4,6}$

$K1_{5,1} := k1_{5,1}$ $\quad K1_{5,2} := k1_{5,2}$ $\quad K1_{5,3} := k1_{5,3}$

$K1_{5,4} := k1_{5,4}$ $\quad K1_{5,5} := k1_{5,5}$ $\quad K1_{5,6} := k1_{5,6}$

$K1_{6,1} := k1_{6,1}$ $\quad K1_{6,2} := k1_{6,2}$ $\quad K1_{6,3} := k1_{6,3}$

$K1_{6,4} := k1_{6,4}$ $\quad K1_{6,5} := k1_{6,5}$ $\quad K1_{6,6} := k1_{6,6}$

$$K1 = \begin{pmatrix} 7200 & 0 & -1080000 & -7200 & 0 & -1080000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 720000 & 0 & 0 & -720000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1080000 & 0 & 216000000 & 1080000 & 0 & 108000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7200 & 0 & 1080000 & 7200 & 0 & 1080000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -720000 & 0 & 0 & 720000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1080000 & 0 & 108000000 & 1080000 & 0 & 216000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bară 2 (figura 5.4.2)

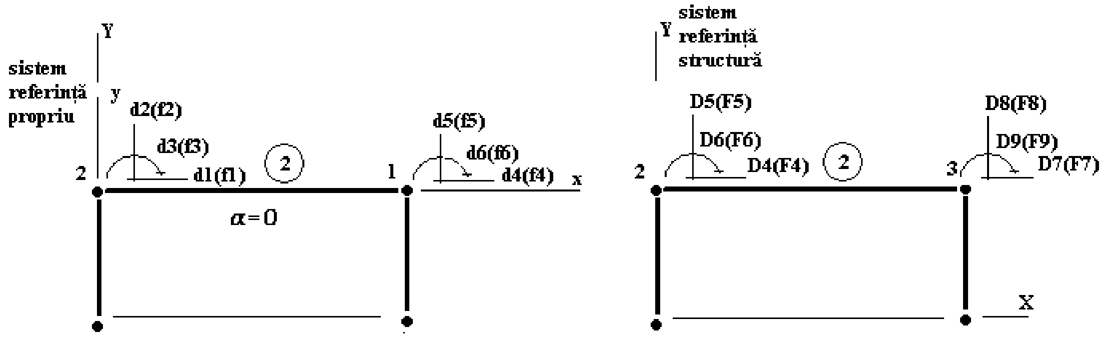

Figura 5.4.2 Parametri şi sisteme de referinţă pentru bara 2

Etapa 1.1 - prin raportare la parametrii proprii

L2 := 600

$$ke2 := \begin{pmatrix} \frac{E\cdot A}{L2} & 0 & 0 & \frac{-E\cdot A}{L2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & 0 & \frac{-12\cdot E\cdot I}{L2^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} \\ 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L2} & 0 & \frac{-6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L2} \\ \frac{-E\cdot A}{L2} & 0 & 0 & \frac{E\cdot A}{L2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12\cdot E\cdot I}{L2^3} & \frac{-6\cdot E\cdot I}{L2^2} & 0 & \frac{12\cdot E\cdot I}{L2^3} & \frac{-6\cdot E\cdot I}{L2^2} \\ 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L2} & 0 & \frac{-6\cdot E\cdot I}{L2^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L2} \end{pmatrix}$$

$$ke2 = \begin{pmatrix} 360000 & 0 & 0 & -360000 & 0 & 0 \\ 0 & 900 & 270000 & 0 & -900 & 270000 \\ 0 & 270000 & 108000000 & 0 & -270000 & 54000000 \\ -360000 & 0 & 0 & 360000 & 0 & 0 \\ 0 & -900 & -270000 & 0 & 900 & -270000 \\ 0 & 270000 & 54000000 & 0 & -270000 & 108000000 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.2 - prin raportare la parametrii structurali aferenţi

$$\alpha2 := 0 \qquad T2 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha2) & \sin(\alpha2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha2) & \cos(\alpha2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha2) & \sin(\alpha2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha2) & \cos(\alpha2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Ke2 := T2^T\cdot ke2\cdot T2$$

$$Ke2 = \begin{pmatrix} 360000 & 0 & 0 & -360000 & 0 & 0 \\ 0 & 900 & 270000 & 0 & -900 & 270000 \\ 0 & 270000 & 108000000 & 0 & -270000 & 54000000 \\ -360000 & 0 & 0 & 360000 & 0 & 0 \\ 0 & -900 & -270000 & 0 & 900 & -270000 \\ 0 & 270000 & 54000000 & 0 & -270000 & 108000000 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.3 - prin raportare la parametrii structurali

$i := 1..12$ $\quad j := 1..12$ $\quad K2_{i,j} := 0$

$K2_{4,4} := k2_{1,1}$ $\quad K2_{4,5} := k2_{1,2}$ $\quad K2_{4,6} := k2_{1,3}$

$K2_{4,7} := k2_{1,4}$ $\quad K2_{4,8} := k2_{1,5}$ $\quad K2_{4,9} := k2_{1,6}$

$K2_{5,4} := k2_{2,1}$ $\quad K2_{5,5} := k2_{2,2}$ $\quad K2_{5,6} := k2_{2,3}$

$K2_{5,7} := k2_{2,4}$ $\quad K2_{5,8} := k2_{2,5}$ $\quad K2_{5,9} := k2_{2,6}$

$K2_{6,4} := k2_{3,1}$ $\quad K2_{6,5} := k2_{3,2}$ $\quad K2_{6,6} := k2_{3,3}$

$K2_{6,7} := k2_{3,4}$ $\quad K2_{6,8} := k2_{3,5}$ $\quad K2_{6,9} := k2_{3,6}$

$K2_{7,4} := k2_{4,1}$ $\quad K2_{7,5} := k2_{4,2}$ $\quad K2_{7,6} := k2_{4,3}$

$K2_{7,7} := k2_{4,4}$ $\quad K2_{7,8} := k2_{4,5}$ $\quad K2_{7,9} := k2_{4,6}$

$K2_{8,4} := k2_{5,1}$ $\quad K2_{8,5} := k2_{5,2}$ $\quad K2_{8,6} := k2_{5,3}$

$K2_{8,7} := k2_{5,4}$ $\quad K2_{8,8} := k2_{5,5}$ $\quad K2_{8,9} := k2_{5,6}$

$K2_{9,4} := k2_{6,1}$ $\quad K2_{9,5} := k2_{6,2}$ $\quad K2_{9,6} := k2_{6,3}$

$K2_{9,7} := k2_{6,4}$ $\quad K2_{9,8} := k2_{6,5}$ $\quad K2_{9,9} := k2_{6,6}$

$$K2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 360000 & 0 & 0 & -360000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 900 & 270000 & 0 & -900 & 270000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 270000 & 108000000 & 0 & -270000 & 54000000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -360000 & 0 & 0 & 360000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -900 & -270000 & 0 & 900 & -270000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 270000 & 54000000 & 0 & -270000 & 108000000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bară 3 (figura 5.4.3)

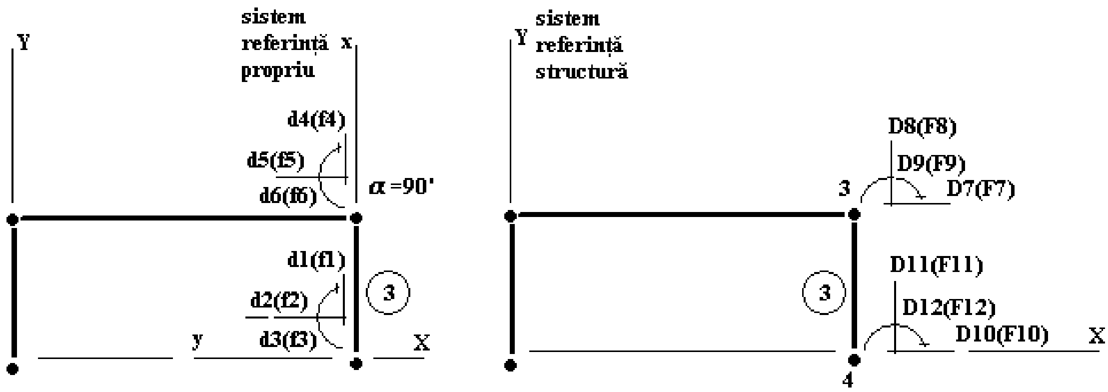

Figura 5.4.3 Parametri şi sisteme de referinţă pentru bara 3

Etapa 1.1 - prin raportare la parametrii proprii

L3 := 30(

$$ke3 := \begin{pmatrix} \frac{E\cdot A}{L3} & 0 & 0 & \frac{-E\cdot A}{L3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & 0 & \frac{-12\cdot E\cdot I}{L3^3} & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} \\ 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L3} & 0 & \frac{-6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L3} \\ \frac{-E\cdot A}{L3} & 0 & 0 & \frac{E\cdot A}{L3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12\cdot E\cdot I}{L3^3} & \frac{-6\cdot E\cdot I}{L3^2} & 0 & \frac{12\cdot E\cdot I}{L3^3} & \frac{-6\cdot E\cdot I}{L3^2} \\ 0 & \frac{6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{2\cdot E\cdot I}{L3} & 0 & \frac{-6\cdot E\cdot I}{L3^2} & \frac{4\cdot E\cdot I}{L3} \end{pmatrix}$$

$$ke3 = \begin{pmatrix} 720000 & 0 & 0 & -720000 & 0 & 0 \\ 0 & 7200 & 1080000 & 0 & -7200 & 1080000 \\ 0 & 1080000 & 216000000 & 0 & -1080000 & 108000000 \\ -720000 & 0 & 0 & 720000 & 0 & 0 \\ 0 & -7200 & -1080000 & 0 & 7200 & -1080000 \\ 0 & 1080000 & 108000000 & 0 & -1080000 & 216000000 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.2 - prin raportare la parametrii structurali aferenţi

$$\alpha := \frac{\pi}{2} \quad T3 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad k3 := T3^T \cdot ke3 \cdot T3$$

$$k3 = \begin{pmatrix} 7200 & 0 & -1080000 & -7200 & 0 & -1080000 \\ 0 & 720000 & 0 & 0 & -720000 & 0 \\ -1080000 & 0 & 216000000 & 1080000 & 0 & 108000000 \\ -7200 & 0 & 1080000 & 7200 & 0 & 1080000 \\ 0 & -720000 & 0 & 0 & 720000 & 0 \\ -1080000 & 0 & 108000000 & 1080000 & 0 & 216000000 \end{pmatrix}$$

Etapa 1.3 - prin raportare la parametrii structurali

$i := 1..12 \qquad j := 1..12 \qquad K3_{i,j} := 0$

$K3_{10,10} := k3_{1,1} \qquad K3_{10,11} := k3_{1,2} \qquad K3_{10,12} := k3_{1,3}$

$K3_{10,7} := k3_{1,4} \qquad K3_{10,8} := k3_{1,5} \qquad K3_{10,9} := k3_{1,6}$

$K3_{11,10} := k3_{2,1} \qquad K3_{11,11} := k3_{2,2} \qquad K3_{11,12} := k3_{2,3}$

$K3_{11,7} := k3_{2,4} \qquad K3_{11,8} := k3_{2,5} \qquad K3_{11,9} := k3_{2,6}$

$K3_{12,10} := k3_{3,1} \qquad K3_{12,11} := k3_{3,2} \qquad K3_{12,12} := k3_{3,3}$

$K3_{12,7} := k3_{3,4} \qquad K3_{12,8} := k3_{3,5} \qquad K3_{12,9} := k3_{3,6}$

$K3_{7,10} := k3_{4,1} \qquad K3_{7,11} := k3_{4,2} \qquad K3_{7,12} := k3_{4,3}$

$K3_{7,7} := k3_{4,4} \qquad K3_{7,8} := k3_{4,5} \qquad K3_{7,9} := k3_{4,6}$

$K3_{8,10} := k3_{5,1} \qquad K3_{8,11} := k3_{5,2} \qquad K3_{8,12} := k3_{5,3}$

$K3_{8,7} := k3_{5,4} \qquad K3_{8,8} := k3_{5,5} \qquad K3_{8,9} := k3_{5,6}$

$K3_{9,10} := k3_{6,1} \qquad K3_{9,11} := k3_{6,2} \qquad K3_{9,12} := k3_{6,3}$

$K3_{9,7} := k3_{6,4} \qquad K3_{9,8} := k3_{6,5} \qquad K3_{9,9} := k3_{6,6}$

$$K3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7200 & 0 & 1080000 & -7200 & 0 & 1080000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 720000 & 0 & 0 & -720000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1080000 & 0 & 216000000 & -1080000 & 0 & 108000000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7200 & 0 & -1080000 & 7200 & 0 & -1080000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -720000 & 0 & 0 & 720000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1080000 & 0 & 108000000 & -1080000 & 0 & 216000000 \end{pmatrix}$$

Etapa 2, stabilirea ecuaţiei matriceale de echilibru static a structurii:

$$K := K1 + K2 + K3$$

K =

	1	2	3	4	5
1	7200	0	-1080000	0	0
2	0	720000	0	0	0
3	-1080000	0	216000000	0	0
4	0	0	0	7200	0
5	0	0	0	0	720000
6	0	0	0	-1080000	0
7	-7200	0	1080000	0	0
8	0	-720000	0	0	0
9	-1080000	0	108000000	0	0
10	0	0	0	-7200	0
11	0	0	0	0	-720000
12	0	0	0	-1080000	...

$$|K| = 0.000$$

Etapa 3, introducerea condiţiilor la limită (cl):

$$Kcl := \begin{pmatrix} K_{4,4} & K_{4,5} & K_{4,6} & K_{4,7} & K_{4,8} & K_{4,9} \\ K_{5,4} & K_{5,5} & K_{5,6} & K_{5,7} & K_{5,8} & K_{5,9} \\ K_{6,4} & K_{6,5} & K_{6,6} & K_{6,7} & K_{6,8} & K_{6,9} \\ K_{7,4} & K_{7,5} & K_{7,6} & K_{7,7} & K_{7,8} & K_{7,9} \\ K_{8,4} & K_{8,5} & K_{8,6} & K_{8,7} & K_{8,8} & K_{8,9} \\ K_{9,4} & K_{9,5} & K_{9,6} & K_{9,7} & K_{9,8} & K_{9,9} \end{pmatrix}$$

$$
Kcl = \begin{pmatrix} 367200 & 0 & 1080000 & -360000 & 0 & 0 \\ 0 & 720900 & 270000 & 0 & -900 & 270000 \\ 1080000 & 270000 & 324000000 & 0 & -270000 & 54000000 \\ -360000 & 0 & 0 & 367200 & 0 & 1080000 \\ 0 & -900 & -270000 & 0 & 720900 & -270000 \\ 0 & 270000 & 54000000 & 1080000 & -270000 & 324000000 \end{pmatrix}
$$

$$
\left| Kcl \right| = 157453588530709250000000000000000000000
$$

$$
Fcl := \begin{pmatrix} 0 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Etapa 4, determinarea deplasărilor necunoscute (nec):

$$
Dnec := \mathrm{lsolve}(Kcl, Fcl) \quad Dnec = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.013888889 \\ 0 \\ 0 \\ -0.013888889 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

- generarea vectorului deplasărilor:

$$
D := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Dnec_1 \\ Dnec_2 \\ Dnec_3 \\ Dnec_4 \\ Dnec_5 \\ Dnec_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0138889 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0138889 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Etapa 5 (auxiliară), determinarea forţelor din reazeme:

$F := K \cdot D$

$F =$

	1
1	0.000
2	10000.000
3	0.000
4	0.000
5	-10000.000
6	0.000
7	0.000
8	-10000.000
9	0.000
10	0.000
11	10000.000
12	0.000

Etapa 6 (auxiliară), determinarea eforturilor din zăbrele:

Bara 1

$$D1 := \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} \qquad fe1 := ke1 \cdot T1 \cdot D1 \qquad fe1 = \begin{pmatrix} 10000.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ -10000.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix}$$

Bara 2

$$D2 := \begin{pmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{pmatrix} \qquad fe2 := ke2 \cdot T2 \cdot D2 \qquad fe2 = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix}$$

Bara 3

$$D3 := \begin{pmatrix} D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{pmatrix} \qquad fe3 := ke3 \cdot T3 \cdot D3 \qquad fe3 = \begin{pmatrix} 10000.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ -10000.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix}$$